Les angles alternes-internes : un problème de la profession

Gisèle Cirade

To cite this version:

Gisèle Cirade. Les angles alternes-internes : un problème de la profession. Petit x, 2008, 76, pp.5-26. hal-01149509

HAL Id: hal-01149509

https://hal-univ-tlse2.archives-ouvertes.fr/hal-01149509

Submitted on 7 May 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LES ANGLES ALTERNES-INTERNES : UN PROBLÈME DE LA PROFESSION

Gisèle CIRADE
Université Toulouse II-Le Mirail (IUFM) & UMR ADEF

Résumé : Sur le chemin qui conduit des mathématiques à enseigner aux mathématiques pour l'enseignement, les professeurs stagiaires sont confrontés à des difficultés que la formation dispensée à l'IUFM vise à permettre de problématiser et de surmonter. Dans le cas étudié ici - la caractérisation du parallélisme à l'aide des angles alternes-internes -, l'analyse de l'évolution curriculaire de la notion à enseigner permet de mettre en évidence un « problème de la profession », qui doit donc, à ce titre, recevoir une solution collective.

Mots-clés : didactique des mathématiques, géométrie du plan, théorie anthropologique du didactique, formation initiale des professeurs de mathématiques, problèmes de la profession, clinique des formations.

1. Le problème étudié : mise en évidence

Pour les lauréats des concours de recrutement, l'entrée dans le métier de professeur de mathématiques s'accompagne de ce qui devrait être pour beaucoup une découverte, quand celle-ci n'est pas refoulée : les mathématiques à enseigner se révèlent, de façon souvent inattendue, *problématiques*. Cela n'est sans doute pas évident *a priori* pour beaucoup de professeurs stagiaires, qui peuvent être portés à penser que, sauf peut-être pour quelques questions spéciales étudiées dans les grandes classes du lycée, ils disposent de suffisamment de connaissances et, si l'on peut dire, d'assez de puissance mathématique pour n'avoir pas à craindre de n'être pas « à la hauteur » à cet égard. Malgré cela, les difficultés foisonnent autour des contenus à enseigner. Le type de difficulté sur lequel nous nous arrêterons concerne certains contenus mathématiques propres à l'enseignement secondaire, qu'on peut mal connaître mais dont on devrait pouvoir se rendre maître assez rapidement, notamment grâce à l'aide de ce que nous nommerons *« la profession »*, c'est-à-dire ici la *profession de professeur de mathématiques*, en entendant par là, tout d'abord, les professeurs de mathématiques *stricto sensu*, mais aussi les responsables officiels et les militants associatifs du métier, les formateurs de professeurs de mathématiques ainsi que les chercheurs tant en matière d'enseignement des mathématiques que de formation à cet enseignement. Sur ce type de difficulté, donc, la profession, avec sa tradition écrite (les manuels notamment) et sa tradition orale (les contacts avec les « collègues »), est censée assumer la fonction que doit assumer toute profession : pourvoir aux besoins de connaissances et de culture professionnelles de ses membres. Mais il arrive que cette fonction essentielle ne soit pas assumée, ou le soit insuffisamment. Le professeur stagiaire, d'abord peu farouche, ne voit pas le danger qui guette : il s'avance trop souvent sans mesurer ce que le curriculum *réel* qu'il doit faire vivre contient de chausse-trappes.

Dans le cadre d'un travail portant sur la formation initiale des professeurs de mathématiques, nous avons mis en évidence que, sur le chemin qui conduit des mathématiques *à enseigner* aux mathématiques *pour l'enseignement* [1], les jeunes professeurs observés sont confrontés à une difficulté concernant la caractérisation angulaire du parallélisme à l'aide des angles alternes-internes en classe de 5^e. L'élément clé peut s'énoncer de la façon suivante : « Deux droites coupées par une sécante commune sont parallèles *si et seulement si* elles forment avec cette sécante des angles alternes-internes égaux. » Il s'avère qu'on se trouve là, typiquement, devant un contenu mathématique à enseigner que le jeune professionnel va découvrir, bien souvent, *au moment de l'enseigner*, ou du moins sur lequel il n'a pas eu l'occasion d'une réflexion appropriée, ainsi qu'en témoigne cette question de l'un d'entre eux : « Quelle définition donner des angles alternes-internes ? (Il y a deux possibilités : le cas où les droites sont parallèles et le cas plus général.) »

Ce constat nous a conduite à examiner des manuels de 5^e publiés à la rentrée 1997, à l'occasion de la mise en place du programme encore en vigueur à la rentrée 2005. Nous avons alors pu constater que bien des manuels ne définissent les angles alternes-internes que dans le cas où les droites considérées sont *parallèles*, ce qui rend évidemment *impossible* toute formulation correcte de la propriété réciproque, à savoir que si deux droites (non supposées parallèles) déterminent avec une sécante des angles alternes-internes égaux, alors elles sont parallèles. Il se trouve que cette « difficulté » se trouve déjà *dans le texte du programme*, lequel prescrit aux élèves de « connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante », formulation dont on peut penser qu'elle n'est pas pour rien dans la définition restrictive retenue par les auteurs de manuels.

L'étude de l'évolution curriculaire sur plus d'un demi-siècle de l'organisation mathématique locale constituée autour de la notion d'angles alternes-internes s'avère riche d'enseignements. Dans les années 1940, les angles alternes-internes sont définis sans façon dans le cas où deux droites *quelconques* sont coupées par une sécante commune. À la fin des années 1960, la situation apparaît déjà plus contrastée : tel manuel continue de se placer dans le cas où les droites sont quelconques alors que tel autre se place dans le cas où les droites sont parallèles. La période qui suit, celle dites des mathématiques modernes, marque, on le sait, une pause dans l'étude naïve des angles : les angles disparaissent des programmes. Mais lorsque, dans les années 1980, les angles alternes-internes font leur retour dans les programmes du collège, on s'aperçoit que de nombreux manuels n'introduisent plus cette notion *que dans le cas de droites parallèles*. Il faut ensuite attendre les éditions de l'année 2001 pour déceler un changement significatif : la quasi-totalité des manuels publiés alors donnent à nouveau la définition des angles alternes-internes dans le cas où les droites sont quelconques.

D'où provient ce problème ? Il semble que nous soyons là en présence d'un interdit qui émerge à l'occasion de la réforme des mathématiques modernes. En effet, si la propriété de deux angles d'être *alternes* se définit sans trop de difficultés, il n'en va pas de même pour le caractère *interne* d'un angle. Car, si cette notion se laisse définir assez facilement dans le cas où les droites sont parallèles, les choses changent avec le cas général, où la notion de « bande » du plan n'est plus disponible. On peut penser que le prix à payer est alors apparu trop élevé, en sorte que, l'innocence primitive – qui

1. Nous avons été amenée à reprendre la distinction, ancienne en théorie anthropologique du didactique, des *mathématiques à enseigner* (celles que le programme prescrit), des *mathématiques pour l'enseignant* (ces mathématiques qu'un professeur doit connaître pour s'engager dans l'enseignement de ce que le programme prescrit) et des *mathématiques pour l'enseignement* (celles qu'il doit connaître pour concevoir et réaliser un tel enseignement).

prévalait encore avant la réforme des mathématiques modernes – étant perdue, il est apparu impossible tout à la fois de ne pas donner de définition et de donner une définition convenable.

Les développements que nous présentons s'appuient sur une étude de la formation dispensée à l'IUFM d'Aix-Marseille et, plus particulièrement, sur le dispositif dit des « questions de la semaine » intégré à cette formation [2]. Chaque semaine ouvrable, à l'occasion d'une séance de travail où toute la promotion est en principe réunie, chaque élève professeur est invité à consigner par écrit, individuellement, « une difficulté rencontrée dans le cadre de sa formation au métier de professeur de mathématiques, y compris bien sûr dans les stages de terrain, c'est-à-dire à l'occasion des enseignements qu'il assure ou auxquels il est associé ». Le « contrat » autour de ce dispositif peut être décrit de la façon suivante. Tout d'abord, les difficultés évoquées par écrit peuvent être d'un ordre quelconque, pourvu qu'elles apparaissent à l'auteur de la question comme liées à la formation qu'il reçoit et qu'il s'efforce de maîtriser. Ensuite, les questions posées sont regardées, non comme des difficultés personnelles singulières, mais comme des difficultés *liées à la profession*, et plus précisément à l'entrée dans la profession. Enfin, les éléments de réponse qui seront apportés par écrit ne constituent pas tant une réponse à l'*auteur* de la question qu'une réponse à la *question* posée. Plus précisément, ils constituent un apport de *matériaux* en vue de permettre à chacun de construire une réponse qu'il mettra en œuvre personnellement et provisoirement, en attendant d'autres « matériaux » éventuels qui le conduiront peut-être à déconstruire et à reconstruire la réponse antérieurement construite. Le vaste corpus de questions et de matériaux sur lequel nous avons travaillé nous a ainsi permis de repérer et d'analyser certaines des difficultés auxquelles sont confrontés les élèves professeurs de deuxième année.

2. Les élèves professeurs face aux mathématiques à enseigner

2.1. La difficulté rencontrée

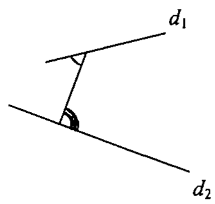
La question, étudiée en classe de 5e, des *angles alternes-internes*, est un bon analyseur de la gamme des difficultés que peut rencontrer quiconque s'efforce de devenir professeur de mathématiques. Le programme de 5e encore en vigueur à la rentrée 2005 comportait le passage suivant.

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Caractérisation angulaire du parallélisme	Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante. Connaître et utiliser les expressions : angles adjacents, angles complémentaires, angles supplémentaires.	On pourra utiliser également le vocabulaire suivant : angles opposés par le sommet, alternes-internes, correspondants.

2. Nous nous référons ici à notre travail de thèse (Cirade 2006), conduit dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) dont on trouvera une synthèse récente dans Chevallard 2006.

Notons d'abord que la notion d'angles alternes-internes figure parmi les quelques notions qui *pourront* être utilisées, sans que le programme fasse obligation de les introduire. Il semble pourtant que la norme prévalente soit ici d'en faire usage. Or, pour les jeunes professeurs, ici comme il en va souvent, la matière à enseigner n'est rencontrée qu'en situation de devoir l'enseigner. L'enseignement se fait, si l'on peut dire, « à flux tendus », en sorte que, quelquefois, les connaissances mathématiques dont il serait bon que le professeur stagiaire dispose ne sont pas encore disponibles. Quelle est alors l'une des toutes premières interrogations sur lesquelles achoppe le professionnel débutant ? Le dispositif des questions de la semaine le révèle : comme le montrent les questions ci-après [3], il lui revient d'abord de clarifier ce qu'on appellera, dans la classe, « angles alternes-internes ».

1. Quelle définition donner des angles alternes-internes ? (Il y a deux possibilités : le cas où les droites sont parallèles et le cas plus général.) (2000-2001, 5e, semaine 7)
2. Peut-on parler d'angles alternes-internes et d'angles correspondants lorsque les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles ? (2002-2003, 2de, semaine 3)
3. Même si d_1 et d_2 ne sont pas parallèles, peut-on dire que les angles marqués sur la figure ci-contre sont alternes-internes ? (2002-2003, 2de, semaine 17)
4. Parle-t-on d'angles alternes-internes lorsque les droites qui les définissent ne sont pas parallèles ? Même question pour les angles correspondants. (2003-2004, 2de, semaine 9)
5. Comment définir deux angles alternes-internes, en 5e, dans le cas de deux droites non parallèles coupées par une sécante (cas général) ? Est-ce nécessaire ? Un schéma clair ne suffit-il pas ? (2004-2005, 5e, semaine 12)



En 2001-2002, c'est une professeure stagiaire qui, spontanément, « lève le lièvre » en écrivant :

> Le thème de la « caractérisation angulaire du parallélogramme » se situe dans le secteur « Transformation de figures par symétrie centrale. Parallélogramme ». Pourtant on voit que « seules les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante » figurent dans les compétences exigibles. Il n'y a donc pas caractérisation. De plus, des notions qui n'ont aucun rapport avec la symétrie centrale (angles adjacents, supplémentaires, complémentaires) sont exigibles alors que d'autres (angles opposés par le sommet, alternes-internes) qui mériteraient d'y figurer n'ont leur place que dans les commentaires. (2001-2002, 5e, semaine 8).

Où se situe donc le problème ? Pour le voir, examinons la réponse répétée au cours des années dans la formation (on reproduit ici la réponse pour l'année 2000-2001).

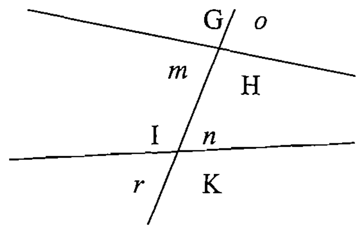
> 1. Il est vrai que la rubrique Compétences exigibles indique :
>
> « Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante.
>
> Connaître et utiliser les expressions : angles adjacents, angles complémentaires, angles supplémentaires. »
>
> Par ailleurs, la rubrique Commentaires précise :
>
> « On pourra utiliser également le vocabulaire suivant : angles opposés par le sommet, alternes-internes, correspondants. »

3. Les questions présentées sont accompagnées de l'information codée suivante : année de la formation, classe en responsabilité, semaine dans l'année de formation.

On peut donc être tenté de penser que les notions d'angles alternes-internes et d'angles correspondants sont limitées par le programme au cas de deux droites parallèles coupées par une sécante.

2. Ce serait là une conclusion maladroite au plan technique et contraire à toute la tradition d'emploi de ce vocabulaire en géométrie élémentaire. Ainsi, un manuel de géométrie du niveau collège conforme au programme de l'enseignement court du 18 avril 1947 indique-t-il par exemple ce qui suit :

Lorsque deux droites sont coupées par une sécante, elles forment huit angles ; les quatre angles compris entre les droites se nomment **internes** ou **intérieurs** ; les quatre autres se nomment **externes** ou **extérieurs**.



On appelle angles alternes-internes deux angles situés de part et d'autre de la sécante, à l'intérieur des droites et non adjacents.

Exemple : les angles m et n, ainsi que H et I.

On appelle angles correspondants deux angles situés du même côté de la sécante, l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur des droites et non adjacents.

Exemple : les angles n et o, ainsi que K et H, I et G, r et m.

On appelle angles intérieurs d'un même côté, deux angles situés à l'intérieur des droites et d'un même côté de la sécante.

Exemple : Les angles m et I, n et H.

Cette définition est la bonne, tout simplement ! Si on la connaît, le texte du programme devient dénué d'ambiguïté…

2.2. La notion d'angles alternes-internes dans les manuels

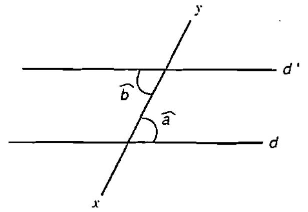
L'argument invoqué – l'impossibilité de simplement *énoncer* la propriété réciproque – devrait, semble-t-il, aller de soi. Pourtant, le système résiste. Alors que, comme l'indiquent les matériaux que nous venons de citer, la définition « générale » traditionnelle, où l'on considère deux droites distinctes d_1 et d_2 et une sécante commune d, ne suppose pas que d_1 et d_2 sont parallèles, beaucoup de manuels, peut-être induits en erreur par le texte du programme (« connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante »), ne définissent la notion d'angles alternes-internes *que* lorsque les droites distinctes d_1 et d_2 sont *parallèles*, ce que feront à leur suite bien des professeurs.

À titre d'exemple, suivons ici différentes éditions du manuel Transmath pour la classe de 5^e publié chez Nathan. L'édition de 1989 s'efforce de coller au texte du programme alors en vigueur (Malaval *et al.* 1989). La rubrique « Ce qu'il faut savoir », page 48, comporte un développement intitulé « Utiliser des angles pour reconnaître des parallèles » : c'est là que le problème attendu devrait se poser. Comme on le voit sur l'extrait ci-après, la page est divisée en deux colonnes : dans la colonne de droite figure le cas où il y a égalité des angles correspondants ; dans la colonne de gauche se trouve le cas où il y a égalité des angles alternes-internes. Comment les auteurs se tirent-ils de la difficulté qui les guette ? Par une subtilité de langage ! Les angles dont l'égalité entraîne le parallélisme ne sont pas appelés angles alternes-internes ou angles correspondants mais, respectivement, angles « *en position* d'alternes-internes » et angles « *en position* de correspondants ».

Utiliser des angles pour reconnaître des parallèles

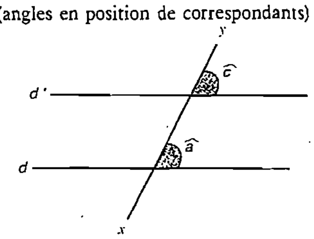
(xy) est une sécante aux droites d et d'.

Lorsque l'on sait que $\hat{a} = \hat{b}$
(angles en position d'alternes-internes)



alors on peut affirmer que les droites d et d' sont **parallèles.**

Lorsque l'on sait que $\hat{a} = \hat{c}$
(angles en position de correspondants)

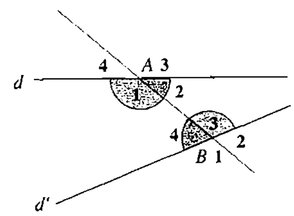


alors on peut affirmer que les droites d et d' sont **parallèles.**

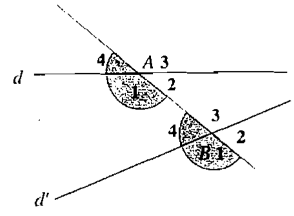
Bien entendu, aucune définition n'est, à proprement parler, donnée, ni pour les angles alternes-internes (lorsque les deux droites sont parallèles) ni pour les angles *en position* d'alternes-internes (quand elles ne le sont pas). Ces « définitions », en effet, se « lisent » sur les figures proposées, à ceci près toutefois que, dans toutes ces figures, les droites que nous avons appelées d_1 et d_2 sont... parallèles ! À aucun moment le lecteur n'est confronté à une situation graphique semblable à celle figurant dans le manuel cité par le formateur dans la réponse reproduite plus haut. En réalité, ce qui se rapproche le plus d'une définition apparaît, non dans la rubrique « Ce qu'il faut savoir » (qu'on pourrait, *a priori*, assimiler à ce que les programmes appellent la *synthèse*), mais dans une rubrique qui vient *avant*, celles des « Activités », où, cependant, rien n'apparaît au-delà de ce que nous avons noté jusqu'ici. L'édition du manuel Transmath de 5^e qui paraît en 1995 ne change rien à la rhétorique précédente (Malaval et al. 1995, notamment p. 170). Le schéma général de deux droites d_1 et d_2 non nécessairement parallèles et d'une sécante commune n'y apparaît pas, et le distinguo entre angles alternes-internes et angles *en position* d'alternes-internes est encore requis pour contourner la difficulté examinée. Sautons six années encore. En 2001, le manuel Transmath montre un changement significatif, bien qu'un peu subreptice : la rubrique « Ce qu'il faut savoir » s'appelle désormais « Les savoirs » (Malaval et al. 2001, notamment p. 187). Elle comporte notamment un point 4 intitulé « Deux parallèles et une sécante » : rien jusque-là semble n'avoir changé. Mais sous ce titre immobile, un petit schéma innove : il montre deux droites distinctes, clairement *non parallèles*, coupées par une sécante commune, tandis qu'un commentaire indique : « sur cette figure les angles $\hat{a}$ et $\widehat{a}'$ sont dits alternes-internes, $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont dits correspondants ». Pour le reste, rien ne sera changé, ni en ce qui concerne les propriétés de ces angles lorsque les droites sont parallèles, ni pour ce qui est de reconnaître le parallélisme de deux droites lorsque les angles anciennement dits « en position d'alternes-internes » qu'elles forment avec une sécante commune sont égaux.

L'évolution que l'on vient de décrire est en réalité exemplaire d'une difficulté charriée par le programme et reconduite dans les manuels. Ce n'est en fait qu'au cours des dernières années que l'on voit peu à peu les manuels s'affranchir de ce qui apparaît rétrospectivement comme un mystérieux oukase : dans l'édition 2001 de divers manuels, le passage à la définition « générale » est désormais largement majoritaire. On a reproduit ci-après, à titre d'illustration, un extrait, intitulé « Angles définis par deux droites d et d' et une sécante (AB) », d'un manuel de 5e paru en 2001 chez Bordas (Serra 2001, p. 186).

Les angles $\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_3$, $\widehat{A}_2$ et $\widehat{B}_4$ sont alternes-internes par rapport aux droites *d* et *d'* et à la sécante (*AB*).



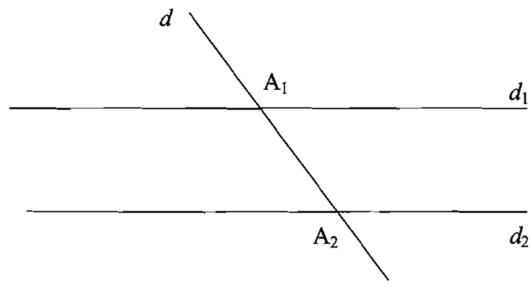
Les angles $\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_1$, $\widehat{A}_2$ et $\widehat{B}_2$, $\widehat{A}_3$ et $\widehat{B}_3$, $\widehat{A}_4$ et $\widehat{B}_4$, sont correspondants par rapport aux droites *d* et *d'* et à la sécante (*AB*).



À parcourir ces manuels, l'impression prévaut qu'un basculement a eu lieu : un interdit a sauté. Désormais, on ose représenter la situation paradigmatique de deux droites *non parallèles* coupées par une sécante commune, même si, dans le dessin proposé, les deux droites non parallèles ne se coupent pas dans le cadre de la page ! Un seul des manuels que nous avons examinés ne parvient pas à franchir le Rubicon : il s'agit du manuel de 5e publié en 2001 dans la collection Triangle chez Hatier (Chapiron et al. 2001, p. 172). Mais sans doute parce que, autour de lui, les choses changent, le parti pris de ne pas changer est explicité par les auteurs, du moins dans la version pour le professeur, où le titre « Angles alternes-internes et angles correspondants » se trouve muni d'un appel de note qui renvoie à la déclaration suivante, imprimée en tout petits caractères : « Nous avons choisi de définir ces mots uniquement dans le cas de droites parallèles. »

2.3. L'origine de la difficulté

On peut évidemment s'interroger sur l'épisode « pathologique » qui aura ainsi affecté pendant d'assez nombreuses années la classe de 5e. Quelle pourrait en être l'origine ? Il semble que l'origine de la difficulté se trouve, presque paradoxalement, dans les valeurs promues par la réforme des mathématiques modernes, autour de 1968. Si l'on suppose deux droites d_1 et d_2 parallèles, il est facile de préciser « rigoureusement » ce que l'on entend par *bande* déterminée par ces droites : intersection du demi-plan de bord d_1 contenant d_2 et du demi-plan de bord d_2 contenant d_1. Si l'on considère maintenant une droite *d* coupant d_1 et d_2 en A_1 et A_2, on nommera *externes* les angles ayant pour sommet l'un des points d'intersection A_1 et A_2 et dont les secteurs angulaires correspondants ont une intersection vide avec la bande ouverte ; les autres angles de sommet A_1 ou A_2 seront dits *internes*.



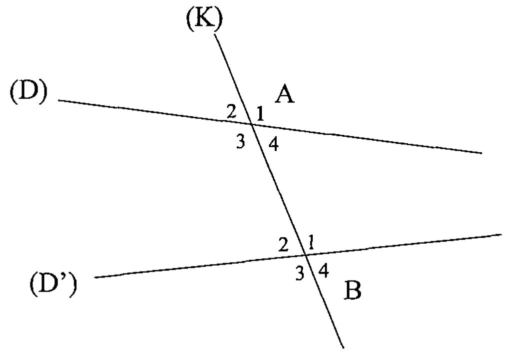
Certes, cette définition reste un peu maladroite (on en verra un peu plus loin une autre, plus habile), mais elle correspond bien à l'appréhension visuelle de la situation graphique. La difficulté surgit lorsque les deux droites d_1 et d_2 sont sécantes, car il n'existe plus rien, alors, qui soit équivalent à la notion de bande déterminée par deux droites parallèles [4]. Le caractère interne est défini alors, non par la donnée de d_1 et d_2 *seulement*, mais par celle de d_1 et d_2 et de la sécante commune d, laquelle va « choisir » l'un des quatre secteurs angulaires déterminés par les deux droites sécantes d_1 et d_2. La situation se complique. Telle est la difficulté que les auteurs de la réforme des mathématiques modernes se voient contraints d'affronter [5]. Que font alors les auteurs devant cet obstacle ? Le manuel Brédif de 4[e], paru en 1968 chez Hachette, est déjà quasiment post-moderne (Wattiaux *et al.* 1968, p. 224-227). Il ne donne guère à voir que le schéma de deux *parallèles* coupées par une sécante, hormis dans un cas : celui de l'étude de la *réciproque* du théorème selon lequel, quand les droites sont parallèles, les « deux angles alternes-internes (ou alternes-externes) sont égaux ». Dans ce cas, considérant des angles supposés *a priori* égaux sans pour autant que les droites soient *supposées* parallèles – c'est ce qu'il s'agit précisément de démontrer ! –, les auteurs écrivent : « On suppose que les angles $\widehat{x'Az'}$ et $\widehat{yBz}$, dits alternes-internes, sont égaux. » On trouve donc très tôt, dans le curriculum français, la gêne qui portera certains à parler d'angles *en position* d'alternes-internes.

Que font alors les auteurs qui prennent le parti, non pas d'éviter la difficulté, mais *de l'affronter sans détour ?* Le manuel de 4[e] de la collection Cossart et Théron, paru en 1969 chez Bordas, donne la réponse (Théron *et al.* 1969, p. 297).

Définitions

Soient deux droites (D) et (D') quelconques et une troisième droite (K) coupant (D) en A et (D') en B.

La droite (K) est appelée **sécante** pour les droites (D) et (D'). (D) et (K) déterminent quatre angles de sommet A, (D') et (K) quatre angles de sommets B (Fig. 107). Nous allons nommer **les couples d'angles comprenant un angle de sommet A et un angle de sommet B.**



Par rapport à la droite (K), un angle de sommet A et un angle de sommet B peuvent être dans le même des demi-plans déterminés par la droite (K), ils sont alors dits « **d'un même côté de la sécante** » ; ils peuvent être dans des demi-plans différents, ils sont alors dits « **alternes** ».

Par rapport aux droites (D) et (D'), un angle de sommet A, ou un angle de sommet B est dit **interne** ou **intérieur** si l'un de ses côtés comprend le segment AB ; il est dit **externe** ou **extérieur** dans le cas contraire.

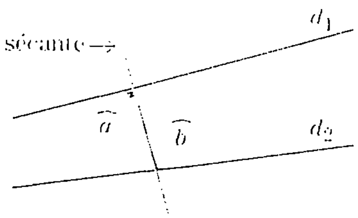
Un angle de sommet A, et un angle de sommet B étant choisis, on donne à ce couple d'angles un nom qui résulte des définitions précédentes, ainsi que l'indique la figure 107 [figure ci-dessus] ; ajoutons que deux angles situés d'un même côté de la sécante, dont l'un est interne et l'autre externe, s'appellent **correspondants**.

4. Même si certains auteurs de manuels n'hésitent pas à « généraliser » la notion de bande au cas de deux droites sécantes ! Voir par exemple Malaval *et al.* 2001, p. 184.
5. Dans le curriculum dit classique – antérieur à la réforme –, on le sait, l'abord des questions d'angles du plan se fait sans façon, à l'aide des représentations graphiques sur une feuille de papier. Le problème semble résolu sitôt qu'on porte son regard sur la figure proposée.

Trois faits au moins méritent d'être soulignés. Tout d'abord, le texte distingue bien les droites (D) et (D'), supposées « quelconques », et la sécante (K). Cette distinction est indispensable lorsqu'on veut inclure le cas où (D) et (D') seraient elles-mêmes sécantes : on a alors affaire à trois droites qui se coupent deux à deux, ce qui donne lieu à *trois* configurations formées de deux droites (qui, en l'espèce, sont sécantes) et d'une sécante à ces deux droites. Ensuite, on notera que la sécante étant choisie (ou donnée), ce qu'il est facile de définir (parmi les 8 angles déterminés par cette sécante), c'est la relation d'*alternance* : deux angles (parmi ces 8) sont *alternes* si les secteurs angulaires correspondants sont situés de part et d'autre de la sécante (K). Enfin, il convient surtout de souligner que, par contraste, la définition du caractère *interne* d'un angle (il ne s'agit plus ici d'une relation binaire entre angles mais d'une propriété de l'*angle lui-même*) apparaît plus délicate. Les auteurs lui donnent une solution habile, voire élégante, mais qui, pour le débutant, peut apparaître d'abord quelque peu artificielle : un angle (parmi les 8 considérés) est interne si l'une des deux demi-droites qui lui servent de côtés contient le segment [AB]. Tel est le prix à payer, en termes de sophistication mathématique, pour obtenir une définition claire et simple de la notion d'angles internes [6]. On peut penser que, à la faveur d'une évolution démathématisante qui tend à promouvoir une vision naturaliste des phénomènes géométriques, ce prix à payer est apparu trop élevé. Faute d'un *definiens* – d'une formulation capable d'en préciser le sens, le *definiendum* – le concept à définir – a donc été occulté.

2.4. La situation actuelle

L'évolution récente tend à dissimuler la pathologie qui a affecté le curriculum mathématique pendant d'assez longues années. Ainsi qu'on l'a dit, en effet, les manuels osent de plus en plus présenter la situation « générale », formée par deux droites non nécessairement parallèles, et une sécante à ces deux droites. Le trauma des mathématiques modernes semble, au moins en partie, dépassé, comme l'atteste la figure ci-contre, extraite du manuel publié en 2001 dans la collection Décimale chez Belin (Pène & Despresle 2001, p. 154). On voit en effet ici que « la » sécante est désignée explicitement, tandis que la relation unissant deux angles alternes-internes se montre graphiquement, dans une évidence ostensive vécue apparemment sans complexe.



$\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont alternes-internes

Le programme « toiletté » pour la classe de 5[e] entré en vigueur en septembre 2006 montre une évolution de même sens. Il comporte, traditionnellement, un thème d'études intitulé « Caractérisation angulaire du parallélisme » : la formulation ne change pas. En revanche, la rubrique des « Capacités » (intitulée jusque-là « Compétences exigibles ») subit un changement qui mérite d'être noté. Alors que le programme antérieur prescrivait de « connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante », le toilettage opéré y amène un ajout qui, sur le point que nous considérons, change considérablement les choses : il s'agit toujours de « connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante », mais il s'agit aussi de connaître et d'utiliser les *réciproques* de ces propriétés :

> Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante et leurs réciproques.

6. Il faut souligner ici le caractère *fonctionnel* d'une telle définition, qui permet, par exemple, de démontrer que, par la symétrie de centre le milieu de [AB], l'image d'un angle interne de sommet A est un angle interne de sommet B.

Une seconde modification est également significative. Jusqu'alors, la rubrique des compétences exigibles incluait un second point : « Connaître et utiliser les expressions : angles adjacents, angles complémentaires, angles supplémentaires. » Or cet alinéa disparaît et son contenu migre vers la troisième colonne du programme (dont le titre n'est plus « Commentaires », mais « Exemples d'activités, commentaires »). La distinction faite jusqu'à présent entre, d'une part, les expressions d'angles adjacents, d'angles complémentaires et d'angles supplémentaires (mentionnées sous la rubrique des compétences exigibles) et, d'autre part, celles d'angles opposés par le sommet, d'angles alternes-internes et d'angles correspondants (mentionnées parmi les « Commentaires » comme *pouvant* être utilisées), cette distinction s'efface, toutes ces expressions devenant également utilisables :

> À cette occasion, le vocabulaire suivant est également utilisé : angles opposés par le sommet, angles alternes-internes, angles correspondants, angles adjacents, angles complémentaires, angles supplémentaires.

Ce même programme « toiletté » évoque alors explicitement un autre point capital, sur lequel nous nous arrêterons maintenant, celui de la *démonstration* des propriétés et de leurs réciproques. On y lit en effet :

> Les propriétés sont formulées et utilisées dans les deux sens (direct et réciproque), mais certaines réciproques peuvent être admises sans démonstration.

On a vu plus haut l'insistance sur les réciproques. En même temps, le passage que nous venons de citer est profondément ambigu [7]. Souligner que l'on pourra admettre « certaines réciproques », c'est autoriser, un peu obscurément sans doute, mais réellement, à reconduire la situation antérieure, en laissant les auteurs de manuels et les professeurs libres de s'épargner la confrontation avec le cas de figure où les deux droites coupées par une sécante commune ne peuvent pas être supposées *a priori* parallèles [8].

3. La question de la démonstration

3.1. Quand les droites sont parallèles

En principe, l'exigence prévaut, au collège, de produire des démonstrations des principaux résultats étudiés, à une nuance près que le document d'accompagnement des programmes du cycle central en vigueur jusqu'à la rentrée 2006 précise dans les termes suivants :

> Pour tout le cycle central, il est de la responsabilité du professeur, en fonction de ses élèves, de décider de l'opportunité de démontrer certains résultats du cours (leur statut, admis sur conjecture ou établi, doit cependant être clair) et d'organiser des étapes de recherche et de rédaction.

Après le problème de la définition, le professeur doit donc affronter celui de la *démonstration.* Les questions des professeurs stagiaires ne sont pas, sur ce point, très nourries, le problème de la démonstration n'y étant évoqué qu'en passant, dans un cadre plus large, comme il en va avec la question suivante :

---

7. On peut se demander pourquoi les auteurs du toilettage du programme n'ont pas osé clarifier les choses en adoptant par exemple la formulation suivante : « Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux droites *d* et *d'* et une sécante coupant *d* et *d'* en deux points distincts : cas où les droites sont parallèles ; réciproques. »

8. On a vu plus haut un exemple, avec le manuel Brédif de 1968, où c'est *l'obligation de démontrer la réciproque* qui contraint les auteurs à évoquer la situation générale.

> En ce qui concerne la somme des angles d'un triangle, la démonstration est accessible en 5^e (par utilisation de la symétrie). Cependant, dans la programmation établie par l'ensemble des professeurs, le chapitre sur les angles (alternes, internes, etc.) et la caractérisation du parallélisme n'arrivent que beaucoup plus tard. Que faire ? Ignorer la programmation et déplacer ce chapitre ? Ne pas faire la démonstration ? (2003-2004, 5^e, semaine 7)

Dans le cas d'espèce, il est vrai que la démonstration de la propriété directe (si les droites sont parallèles, alors les angles alternes-internes sont égaux) se déduit des propriétés de la symétrie centrale, propriétés supposées établies par ailleurs, antérieurement, dans cette même classe de 5^e. Plus précisément, au flou relatif de la question examinée, le programme oppose un enchaînement déductif clair, mentionné dans les commentaires relatifs à l'étude de la « somme des angles d'un triangle », lesquels indiquent en effet :

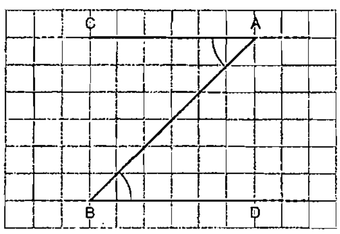
> La symétrie centrale ou la caractérisation angulaire du parallélisme qui en découle permettent de démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés.

Les professeurs sont ainsi clairement invités à déduire la caractérisation angulaire du parallélisme des propriétés de la symétrie centrale. Qu'en est-il, traditionnellement ? Dans tous les manuels que nous avons examinés, une démonstration de la propriété directe est proposée. Mais seuls les manuels anciens, comme le Brédif ou le Cossart et Théron, proposent une démonstration en bonne et due forme. Par contraste, les manuels publiés depuis une vingtaine d'années enchâssent le « principe démonstratif » - il consiste à déduire l'égalité des angles alternes-internes de propriétés supposées connues de la symétrie centrale -, dans le cadre d'une activité d'étude d'un cas plus ou moins général, la recherche de la déduction étant en outre prise en charge de manière plus ou moins étroite par le texte proposé. L'exemple ci-après représente sans doute une bonne illustration de ces stratégies « moyennes » (Malaval *et al.* 1989, p. 42).

VOCABULAIRE :

On dit que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABD}$ sont alternes-internes.

2. La lettre Z



a. Reproduire ce dessin.
Cette lettre admet un centre de symétrie I. Le **marquer** sur le dessin.

b. Dans la symétrie de centre I, **quel est** le symétrique de l'angle $\widehat{BAC}$?
Pourquoi a-t-on $\widehat{BAC} = \widehat{ABD}$?

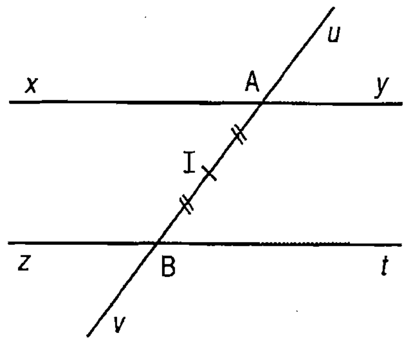
Des deux exemples qui suivent, le premier illustre un style plus proche de la rhétorique usuelle des mathématiques (Pène *et al.* 1995, p. 159).

1. Si deux droites parallèles...

Sur la figure ci-dessous, les droites (xy)et (zt) sont parallèles et I est le milieu du segment [AB]

a. Dans la symétrie de centre I :
- Quel est le symétrique du point A?
- Quelle est la symétrique de la demi-droite $[Ax)$? de la demi-droite $[Av)$?
- Quel est le symétrique de l'angle $\widehat{xAv}$?

Qu'en résulte-t-il pour les angles alternes-internes $\widehat{xAv}$ et $\widehat{tBu}$?



b. Pourquoi les angles $\widehat{xAv}$ et $\widehat{yAu}$ sont-ils égaux?

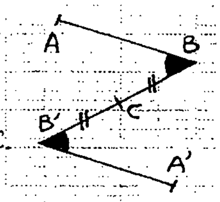
c. Que peux-tu en déduire concernant les angles correspondants $\widehat{yAu}$ et $\widehat{tBu}$?

Le second (ci-après) fournit en revanche un exemple du style « pédagogique » caricatural usité par certains manuels (Lanoëlle *et al.* 1997, p. 171).

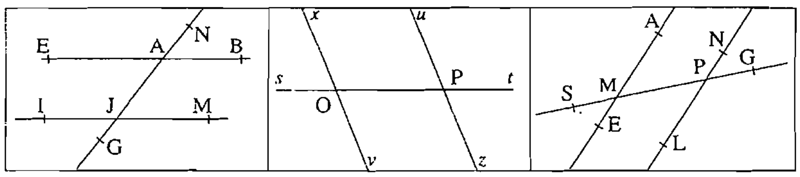
Angles alternes-internes

1. Compléter ces phrases en utilisant les mots : *égaux, parallèles, symétriques.*

Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{A'B'C}$ sont des angles alternes - internes.........
Les droites (AB) et (B'A') sont..........
$\widehat{ABC}$ et $\widehat{A'B'C}$ sont ...... par rapport au point C.
Ce sont donc des angles ......



2. Dans chacune de ces trois figures, citer deux droites parallèles et des angles alternes-internes égaux.

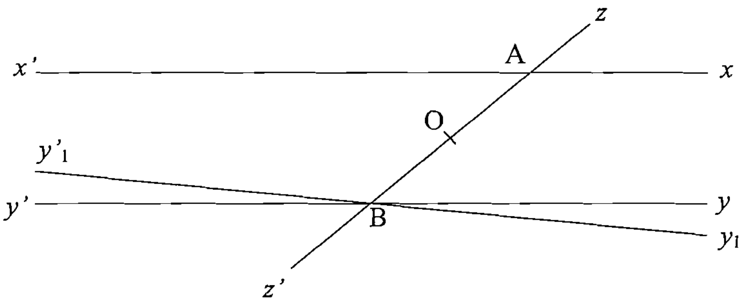


Compléter :

> Deux droites parallèles et une sécante déterminent des angles alternes-internes ....

3.2. Quand les angles sont égaux

La situation est différente s'agissant de démontrer la réciproque – le fait que, si les angles alternes-internes sont égaux, alors les droites sont parallèles. La démonstration de la réciproque d'une propriété géométrique fait traditionnellement appel, dans un certain nombre de cas importants (théorème de Pythagore, théorème de Thalès, etc.), à la propriété directe elle-même. Dans le cas qui nous intéresse, la démonstration traditionnelle (voir la figure ci-après) consiste à utiliser la propriété directe en considérant la droite (y'_1y_1) parallèle en B à la droite $(x'x)$: d'après la propriété directe, les angles alternes-internes sont égaux, d'où l'on peut déduire que la droite (y'_1y_1) est identique à la droite $(y'y)$, qui est donc parallèle à $(x'x)$, ce qu'il fallait démontrer. La difficulté se trouve dans la déduction évoquée qui, pour apparaître intuitive, ne se laisse pas mettre en forme si aisément, comme on le voit dans la démonstration proposée dans le manuel Brédif de 1968, à laquelle nous avons déjà fait référence.

> Soit deux droites $x'x$ et $y'y$ coupées, respectivement, en A et B par une droite $z'z$, et telles que les demi-droites Ax' et By' sont dans un même demi-plan de frontière $z'z$ (fig. 202 [ci-dessous]).
>
> 
>
>
> On suppose que les angles $\widehat{x'Az'}$ et $\widehat{yBz}$, dits alternes-internes, sont égaux.
>
> Soit O le milieu de AB. La symétrie pour O associe à $x'x$ la parallèle y'_1y passant par B.
>
> Le théorème précédent nous permet d'écrire :
>
> $$\widehat{x'Az'} = \widehat{y_1Bz}.$$
>
> On sait : $$\widehat{x'Az'} = \widehat{yBz}.$$
>
> On déduit : $$\widehat{yBz} = \widehat{y_1Bz}.$$
>
> Ces deux angles sont dans le même demi-plan de frontière z'z, qui ne contient pas Ax' ; ils ont même sommet, B, et un côté commun, Bz.
>
> Ils coïncident donc et : $y'y = y'_1y_1$.
>
> On conclut :
>
> **Si deux droites déterminent avec une sécante des angles alternes-internes égaux, ces droites sont parallèles.**
>
> On conclurait de même si les angles étaient alternes-externes.

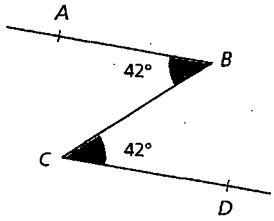
D'autres auteurs, tels ceux du manuel de la collection Cossart et Théron paru en 1969, organisent autrement leur travail déductif. Mais, dans tous les cas, surgissent des problèmes de position dans le plan qui ne peuvent guère être résolus que par des considérations relevant de la *géométrie de l'ordre* (selon l'expression due à Emil Artin). À cet égard, le minimum - bien attesté dans les ouvrages anciens - de ce qu'il faut supposer est constitué par le résultat suivant : si des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BAD}$ sont égaux, et si C et D sont situés du même côté par rapport à la droite (AB), alors la demi-droite [AC) est confondue avec la demi-droite [AD). Pourtant, même ramenée à ce noyau démonstratif, il semble que l'attention explicite aux questions de géométrie de l'ordre qui est ici requise ne puisse être obtenue dans l'enseignement actuel des mathématiques au collège. Il y aurait donc, s'agissant de la réciproque examinée, *une création démonstrative à faire et à partager.*

Or l'examen des manuels ne montre aucunement l'effort d'invention mathématique qui serait ici nécessaire. La plupart d'entre eux, en effet, se contentent de proposer à l'élève d'effectuer une « observation », c'est-à-dire l'ébauche d'une expérimentation graphique.

Ainsi en va-t-il dans cet extrait d'un manuel de 5e publié en 1997 chez Delagrave, où l'enseignement des mathématiques semble être au plus mal (Corrieu *et al.* 1997, p. 167).

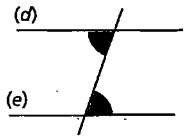
DÉCOUVRIR un rôle des angles alternes-internes

■ Dessine deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ mesurant chacun 42° et disposés comme ci-dessous :



Tu constates que les droites (*AB*) et (*CD*) sont parallèles.

Si les angles alternes-internes (marqués en rouge) sont égaux alors les droites (*d*) et (*e*) sont parallèles.



Tout se passe ici comme s'il s'agissait moins d'apporter *objectivement* la preuve – qui s'imposerait à tous et à chacun – du parallélisme des droites (AB) et (CD), que de permettre à l'élève de se convaincre, *subjectivement*, de ce parallélisme. Or rien n'empêche que ce qui suffira à convaincre l'un *ne convainque nullement tel autre*. Et le fait même que les deux soient convaincus n'équivaut pas *ipso facto* à la production d'une preuve objectivement partageable ! À un *ethos* de la conviction subjective s'oppose ainsi l'éthique de l'intelligibilité collectivement construite et sanctionnée, « objective ». La première attitude est, linguistiquement, portée par l'usage du « je », et donc par l'usage du « tu » prononcé par qui interpelle l'élève *sur sa conviction*. Selon une formulation des plus classiques, mais qui n'est plus aujourd'hui utilisée systématiquement – tout du moins dans les manuels de collège -, la seconde attitude s'exprime en revanche par le « on » : on ne dira pas « *je* constate », mais « *on* constate » et, de façon plus concise encore et d'autant plus significative, « on a ».

Rares sont les manuels qui, sous une forme ou une autre, proposent une vraie démonstration. L'un d'entre eux, paru en 2001 chez Bordas, en propose une dans le cadre d'une « activité » (Serra 2001, p. 185). Les auteurs recourent à la propriété selon laquelle la somme des angles d'un triangle est de 180°. Cette propriété se déduit aisément, par des considérations que l'on trouve déjà dans les *Éléments* d'Euclide, de la propriété directe des angles alternes-internes [9]. Toutefois, le parti des auteurs du manuel examiné ici est légèrement différent. Dans une activité préalable (« Activité 2 ») ils établissent, à partir des propriétés de la symétrie centrale, la propriété de la somme des angles d'un triangle ; cela fait, ils réunissent dans une même activité (« Activité 3 ») la démonstration de la propriété directe puis celle, reproduite ci-après, de la propriété réciproque.

9. Livre I, Proposition 32. Voir par exemple :

Deux angles égaux

1. *a)* Tracer une droite (*AB*).

b) Tracer deux angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABD}$ égaux à 35° et situés de part et d'autre de la droite (*AB*) (angles alternes-internes par rapport aux droites (*AC*), (*BD*) et à la sécante (*AB*)).

2. Quelle propriété semblent avoir les droites (*AC*) et (*BD*) ?

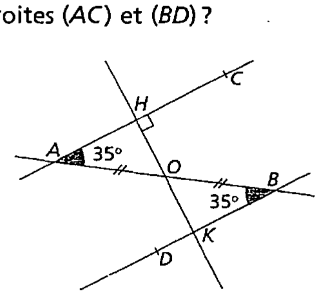
3. On va prouver que les droites (*AC*) et (*BD*) sont parallèles. Pour cela :

a) Compléter la figure comme ci-contre :

– *O* est le milieu du segment [*AB*] ;

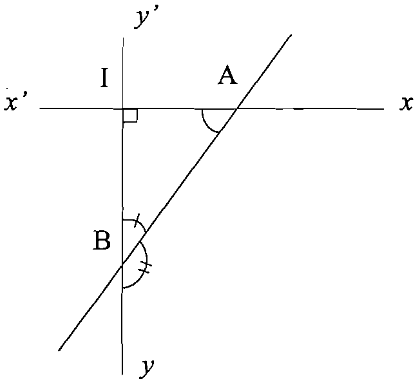
– la droite (*HK*) est la perpendiculaire à la droite (*AC*) qui passe par le point *O*.

b) Calculer les angles $\widehat{HOA}$, $\widehat{BOK}$, puis $\widehat{OKB}$.



4. Que peut-on en conclure pour les droites (*HK*) et (*BD*) ? pour les droites (*AC*) et (*BD*) ?

On aura observé que, en toute rigueur, il resterait à démontrer que la perpendiculaire issue de O à la droite (AC) coupe bien la droite (BD). On peut le faire, par exemple, en utilisant la propriété selon laquelle, dans un triangle rectangle, les angles autres que l'angle droit sont aigus (voir la figure ci-après). Pour qu'elle ne la coupe pas, il faudrait que (AC) = $(x'x)$ soit perpendiculaire à (BD) = $(y'y)$; ces droites se coupant en un point I, le triangle ABI serait rectangle en I, l'angle (interne) $\widehat{x'AB} = \widehat{IAB}$ serait aigu tandis que l'angle $\widehat{ABy}$ serait obtus (comme supplément de l'angle aigu $\widehat{ABI}$), en sorte que, en ce cas, les angles alternes-internes $\widehat{x'AB}$ et $\widehat{ABy}$ ne pourraient être égaux.

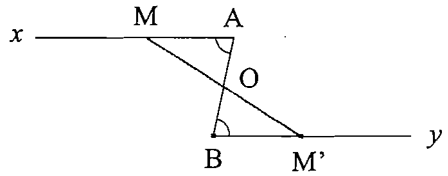


Bien évidemment, les points A et B sont supposés distincts, et cela nous donne l'occasion de noter que la proposition réciproque devrait, en vérité, être énoncée ainsi : étant donné deux droites d et d' et une droite δ sécante à d et d' en deux points distincts A et B (c'est-à-dire ne passant pas par le point d'intersection éventuel, Ω, de d et d'), alors, si des angles alternes-internes formés par d, d' et la sécante commune δ sont égaux, les droites d et d' sont parallèles [10].

On peut, à l'instar d'autres manuels, préférer travailler uniquement à partir des propriétés de la symétrie centrale. Considérons un segment [AB], avec A $\neq$ B, une demi-droite [Ax) et une demi-droite [By) telles que [Ax) et [By) sont situées de part et d'autre de la droite (AB) et $\widehat{BAx} = \widehat{ABy}$. Soit alors O le milieu de [AB] et M un point de la demi-droite [Ax). Notons M' le symétrique de M par rapport à O. Les points

10. Si la condition explicitement imposée ici cessait d'être réalisée, la possibilité de parler d'angles alternes-internes formés par le couple de droites (d, d') et la sécante δ cesserait d'exister.

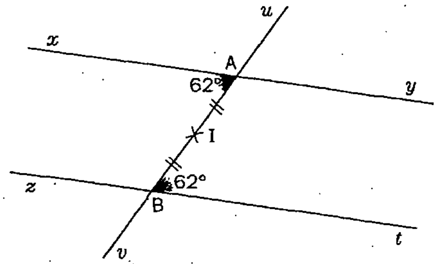
M et M' sont situés de part et d'autre de la droite (AB), en sorte que M' se trouve dans le demi-plan de frontière (AB) qui contient [By).



D'après les propriétés de la symétrie centrale et l'hypothèse d'égalité des angles $\widehat{BA}x$ et $\widehat{AB}y$, on a $\widehat{OBM'} = \widehat{OAM} = \widehat{OB}y$. L'égalité $\widehat{OBM'} = \widehat{OB}y$ à laquelle on aboutit permet de conclure que [BM') = [By). Comme B est le symétrique de A par rapport à O, il en résulte que (BM') est parallèle à (AM), et donc que (By) est parallèle à (Ax), ce qu'il fallait démontrer. On notera que cette démonstration repose sur la considération de demi-droites, et non pas de droites. Dans le cas où l'on utilise des propriétés de la symétrie centrale, la propriété clé, à cet égard, est la suivante : lorsque deux points M et M' sont symétriques par rapport à un point O, alors M et M' sont situés de part et d'autre de toute droite δ passant par O et distincte de (MM'). La considération de demi-droites n'est pas véritablement exploitée dans les manuels récents, dans lesquels les auteurs, s'ils font appel à la notion de demi-droite, le font d'une manière assez formelle pour que le rôle clé que pourrait jouer cette notion n'apparaisse pas clairement. Ainsi en va-t-il dans le passage suivant d'un manuel publié en 2001 chez Belin (Pène & Depresle 2001, p. 153).

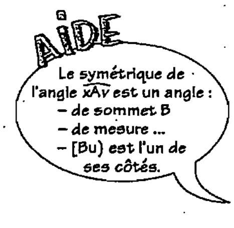
3 Étude d'une réciproque

Hypothèses
- $\widehat{xAv} = \widehat{tBu}$
- I est le milieu de [AB].



Sur la figure ci-dessus, les droites (xy) et (zt) sont coupées en A et B par la droite (uv) en formant une paire d'angles alternes-internes égaux : $\widehat{xAv} = \widehat{tBu}$. I est le milieu du segment [AB].
Dans la symétrie par rapport à I, quels sont les symétriques :
- du point A ?
- de la demi-droite [Av) ?
- de l'angle $\widehat{xAv}$?
- de la demi-droite [Ax) ?

Que peut-on en conclure pour les droites (xy) et (zt) ?



→ exercices 20 à 29

L'aide proposée dans la marge est significative. Car ce qu'elle omet de dire, c'est que, si [Bu) est bien l'un des côtés du symétrique de l'angle $\widehat{xAv}$, l'autre côté se trouve dans le demi-plan déterminé par la droite (AB) qui ne contient pas la demi-droite [Ax) : faute de cette précision, la démonstration présente un implicite rédhibitoire. En fin de compte, c'est moins peut-être la notion de demi-droite que les questions attachées au régionnement du plan par une droite qui introduisent ici un point faible dans l'organisation déductive proposée.

4. Un problème de la profession

4.1. Démonstration et déduction

Les analyses qui précèdent montrent que, tant en ce qui concerne la définition des angles alternes-internes que la démonstration des propriétés directe et réciproque qui lui sont classiquement associées, les professeurs débutants se trouvent affrontés à des difficultés qu'il reviendrait en principe *à la profession* des professeurs de mathématiques de tenter de régler, et sur lesquelles, en attendant, chacun semble faire ce qu'il peut. En vérité, la profession se heurte ici à un obstacle considérable, dont la racine peut être trouvée dans la croyance – si longtemps répandue dans la culture mathématique commune – selon laquelle les propriétés du monde seraient susceptibles d'être déduites *a priori*, sans recours à l'expérience, ou que, du moins, cela serait vrai pour les propriétés de l'espace physique. Dans son *Essay on the Foundations of Geometry* (1897), Bertrand Russell (1872-1970) présentera cette croyance immémoriale dans les termes suivants :

> Geometry, throughout the 17th and 18th centuries, remained, in the war against empiricism, an impregnable fortress of the idealists. Those who held – as was generally held on the continent – that certain knowledge, independent of experience, was possible about the real world, had only to point to Geometry: none but a madman, they said, would throw doubt on its validity, and none but a fool would deny its objective reference.

Le surgissement des géométries non euclidiennes au XIXe siècle ne réussira à ébranler que bien lentement cette foi pluriséculaire, dont la culture de la géométrie élémentaire conserve un vestige essentiel : le travail mathématique en géométrie consisterait à organiser en un ensemble déductif *d'un seul tenant* toutes les propriétés rencontrées au fil de l'étude. Dans cette organisation déductive *d'ensemble*, la manière d'arriver à une propriété donnée est alors regardée comme étant *la* démonstration de cette propriété, la notion de démonstration - plutôt que celle de déduction - constituant dès lors la valeur suprême de l'activité mathématique ainsi conçue. Dans ce cadre, un élève professeur préparant le CAPES de mathématiques demandera par exemple comment *on démontre* tel ou tel théorème – réciproque du théorème des angles alternes-internes, etc. –, c'est-à-dire quelle est *la* démonstration de ce théorème.

Bien entendu, cette conception absolutiste, représentée à l'aurore de l'histoire des mathématiques par les *Éléments* d'Euclide, a dû supporter divers outrages. À la fin du XIXe siècle, comme on le sait, Hilbert et ses collaborateurs se sont employés à combler les lacunes, longtemps inaperçues, de l'édifice euclidien, qui rendaient un certain nombre de démonstrations défectueuses [11]. Surtout, dans les transpositions scolaires du système hypothético-déductif euclidien, il arrivait régulièrement que telle ou telle propriété doive être « admise », c'est-à-dire tenue pour un théorème de ce système alors même qu'on renonçait à lui donner « sa » démonstration. Qu'on accepte qu'un théorème soit admis reposait bien sûr, pour les élèves (sinon toujours pour le professeur), sur l'hypothèse métamathématique que toute propriété de l'espace effectivement rencontrée pourrait se déduire dans le système hypothético-déductif proposé, système auquel s'identifiait, dans telle ou telle de ses transpositions, « la géométrie » elle-même. En vérité, la description précédente, faite au passé, constitue encore le paradigme de la connaissance géométrique scolaire.

---

11. *Grundlagen der Geometrie*, 1899. Voir la traduction française de Paul Rossier, parue en 1971 chez Dunod, Paris.

4.2. Les îlots déductifs

Par contraste, on évoquera sommairement un autre paradigme, dans lequel la géométrie est d'abord définie comme la science de l'espace sensible (et donc, au fond, comme une partie de la physique). À ce titre, les propriétés géométriques ne sauraient avoir pour preuve ultime qu'une preuve de type *expérimental*. Bien entendu, le travail *mathématique* sur ces propriétés consiste notamment en une activité de création d'*organisations déductives locales*. Étant donné une propriété, établie ou supposée, on cherche à montrer que cette propriété se laisse déduire de certaines autres propriétés, établies ou supposées. On peut, au reste, ne rien supposer quant à la vérité de ces autres propriétés. Mais si la déduction évoquée a bien lieu, alors on peut en conclure que, si ces propriétés sont vraies dans l'espace que nous étudions, il en est de même de la propriété examinée. Une grande partie de l'activité mathématique va ainsi être consacrée à établir que certaines propriétés en impliquent d'autres, sans pour autant que, à ce stade, on s'inquiète de savoir s'il existerait un ensemble de propriétés de l'espace – des axiomes dans une certaine théorie mathématique –, tel qu'une propriété quelconque soit vraie dans l'espace si et seulement si on peut la déduire de cet ensemble de propriétés. Bien entendu, pour adopter une telle position épistémologique, il faut avoir renoncé à la croyance selon laquelle la connaissance du monde pourrait se déduire *a priori* de quelques principes ou axiomes, pour adopter l'idée « moderne » d'une connaissance expérimentale du monde dont les productions peuvent être organisées, confirmées, anticipées par un travail « théorique » de type hypothético-déductif.

Un tel changement de paradigme semble, aujourd'hui encore, bloqué, alors même que, pour des raisons certes plus pédagogiques qu'épistémologiques, Gustave Choquet, dans son livre publié en 1964, *L'enseignement de la géométrie* (Choquet 1964), écrivait ceci :

> Le problème [de l'enseignement de la géométrie] est moins simple aux âges intermédiaires, disons entre 13 et 16 ans. L'enfant commence à comprendre ce qu'est une démonstration ; chez certains s'éveille une véritable soif de logique, indiquant que le temps est venu d'aborder sérieusement le raisonnement déductif. On va donc faire établir par l'enfant des morceaux de raisonnement déductif, en prenant soin de lui faire toujours préciser ses prémisses.

On voit ici s'opposer, à la notion de *démonstration*, les notions de *travail déductif* et de « morceaux de raisonnement déductif », que les programmes retiendront à travers l'expression d'*îlots déductifs* (expression qui apparaît dans le document d'accompagnement du programme de 6e resté en vigueur jusqu'en 2004-2005 et dans le chapitre *Géométrie* du projet de document d'accompagnement des programmes du collège paru en 2007). En même temps, en 1964, Choquet poursuit son propos dans des termes entièrement compatibles avec l'ancien paradigme, puisqu'il écrit : « Il est donc indispensable que le maître de ces enfants dispose d'une axiomatique sous-jacente complète. » À cet égard, il se contente de vouloir qu'une telle axiomatique soit « simple » (c'est-à-dire, en particulier, ne comporte pas de trop nombreux axiomes) et que les axiomes qui la composent, tout en étant « intuitifs » (c'est-à-dire énonçant des propriétés de l'espace aisées à vérifier expérimentalement), soient « forts » (c'est-à-dire permettent de déduire, par des chemins déductifs courts, des propriétés dont la vérification expérimentale ne va pas forcément de soi).

L'insistance sur la connaissance d'*une* axiomatique par les professeurs – dans un livre où Choquet lui-même propose, de façon motivée, une *pluralité* d'axiomatiques – ne laisse pas de poser problème. Elle reconduit subrepticement l'idée immémoriale d'une organisation hypothético-déductive *unique* à des variantes près, qui donnerait à chaque propriété examinée sa démonstration – pas forcément unique, certes, mais très fortement contrainte -, ce qui, nous semble-t-il, constitue un obstacle sérieux à l'idée et à la pratique de jeux déductifs locaux. Afin d'éclairer cette dernière remarque, on a reproduit ci-après un passage des notes du Séminaire 2003-2004 des professeurs stagiaires de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille dans lequel on voit comment le travail expérimental visant à mettre à l'épreuve la conjecture selon laquelle la somme des angles d'un triangle est égale à 180° peut être allégé grâce à un petit travail déductif judicieusement utilisé.

Mais on peut aller plus loin en réalisant une *déduction partielle* qui permette d'alléger la propriété soumise à l'expérience.

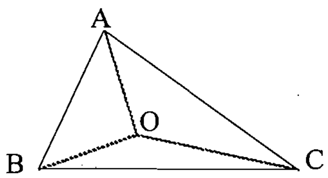
① On peut pour cela dissocier deux propriétés :

θ_1. La somme des angles d'un triangle est la même pour tout triangle.

θ_2. La somme des angles de tout triangle est un angle plat.

À l'évidence, l'assertion θ_2 implique l'assertion θ_1.

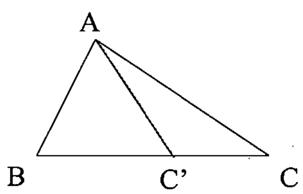
② Inversement, il est facile de *déduire* θ_2 de θ_1. Supposons en effet que la somme des angles de *tout* triangle soit de a degrés. Soit alors un triangle ABC et soit O un point intérieur à ABC.



La somme des angles des triangles AOB, BOC, COA vaut $3a$ degrés. Par ailleurs cette somme vaut celle des angles de ABC, soit a degrés, augmentée des angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$, dont la somme est de 360 degrés. On a donc $3a = a + 360$, soit $a = 180$.

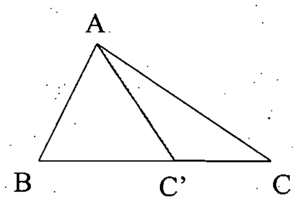
③ On peut établir ce résultat plus simplement encore.

Soit C' un point de]BC[.



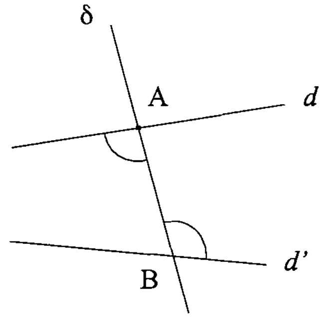
La somme des angles des triangles AC'B et AC'C, soit $2a$ degrés, est égale à la somme des angles du triangle ABC, soit a degrés, augmentée des angles $\widehat{AC'B}$ et $\widehat{AC'C}$, soit 180 degrés. On a ainsi $2a = a + 180$, et donc $a = 180$.

④ On peut alors *soumettre à l'expérience* l'assertion θ_1 en réalisant l'expérience graphique suivante : on choisit un point C' sur]BC[; on vérifie que, lorsqu'on passe de C à C', la diminution de α degrés de l'angle $\widehat{BAC}$, qui devient $\widehat{BAC'}$, est égale à l'augmentation de β degrés de l'angle $\widehat{ACB}$, qui devient $\widehat{AC'B}$.

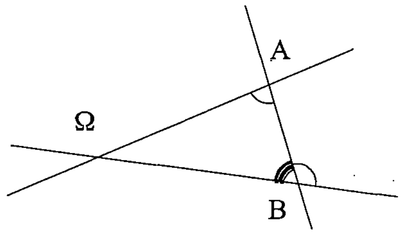


4.3. Retour sur les angles alternes-internes

À la lourde cavalerie de la démonstration, il est ainsi loisible de préférer l'archerie légère du travail déductif « libre » (plutôt que sur-contraint), dont la visée est plus ouverte et la portée plus large. À titre d'illustration, reprenons ici une dernière fois la question de la propriété réciproque des angles alternes-internes. Supposons donc deux droites *d* et *d'* et une sécante δ coupant *d* en A et *d'* en B, avec A ≠ B. On suppose en outre que les angles alternes-internes formés par le couple (*d, d'*) et la sécante δ sont égaux.



Comment en déduire que, alors, *d* et *d'* sont parallèles ? Un raisonnement par l'absurde, ou plus précisément par contraposition, montre qu'il suffit d'établir que, si les droites *d* et *d'* se coupaient en un point Ω, alors les angles alternes-internes *ne pourraient pas* être égaux.



En ce cas, en effet, l'angle $\widehat{\Omega AB}$ (par exemple) ne serait pas supplémentaire de l'angle $\widehat{AB\Omega}$ (puisque, d'après le théorème sur la somme des angles d'un triangle, l'angle $\widehat{\Omega AB}$ est supplémentaire de la *somme* des angles $\widehat{AB\Omega}$ et $\widehat{A\Omega B}$) ; il ne pourrait donc pas être égal à l'angle alterne-interne de sommet B, ce qui achève la « démonstration » demandée, et prouve plus exactement que *la réciproque de la propriété des angles alternes-internes se laisse déduire de la propriété sur la somme des angles d'un triangle.* On voit ici clairement, en négatif, le lien existant, dans les manuels en usage, entre l'absence de cette démonstration et l'absence d'une définition des angles alternes-internes qui prenne en charge le cas de droites *d* et *d'* non parallèles : rude solidarité des manques ! Plus généralement, on peut avancer que la soumission à une organisation déductive *a priori*, que porte en lui le paradigme démonstratif ancien, constitue un obstacle à l'imagination déductive qui, dans le travail concret de la classe, réduit fortement les occasions d'apprentissage en la matière. Au chemin unique que propose la voie démonstrative, le travail déductif libre substitue des cheminements divers, inattendus, qui multiplient les occasions de déduire et donc d'*apprendre à déduire*, en allégeant la lourde obligation traditionnelle de parvenir à tel résultat déterminé par tel chemin tracé à l'avance, qu'il s'agirait seulement de retrouver.

Conclusion

Cette étude montre que les questions soulevées par les élèves professeurs en formation lorsqu'ils abordent le thème de la caractérisation angulaire du parallélisme à l'aide des angles alternes-internes renvoient à des difficultés dont les racines se révèlent à la fois anciennes et profondes. Elles sont anciennes : l'examen de l'évolution curriculaire sur plus d'un demi-siècle conduit en effet à mettre en évidence la rupture survenue, lors de l'introduction des « mathématiques modernes », par rapport à la tradition antérieure, dans laquelle les angles alternes-internes étaient définis sans façon dans le cas de deux droites *quelconques* coupées par une sécante. Cette rupture intervenue il y a quarante ans a eu des répercussions jusqu'à ces dernières années – au cours desquelles, sans donner de définition explicite, les manuels, dans leur grande majorité, ne représentaient que la situation de deux droites *parallèles* coupées par une sécante. Ces racines sont aussi profondes, car une telle « définition », qui empêche d'énoncer et de *penser* la caractérisation angulaire du parallélisme – et tout particulièrement la réciproque –, aura laissé des traces importantes dans le métier, comme le montrent les manuels que nous avons analysés.

Cette étude met en évidence qu'il apparaît souvent éclairant pour un professeur de regarder les difficultés qu'il rencontre comme des *problèmes de la profession* à laquelle il appartient plutôt que comme des difficultés *personnelles* – contingentes, mal définies, circonstancielles –, appelant une réponse individuelle plus ou moins fortement contextualisée [12]. Cette vision des choses, certes traditionnelle, porte en effet à ne pas expliciter *collectivement* les besoins personnellement éprouvés, ce qui apparaît comme un obstacle puissant à la volonté légitime d'élever le niveau de qualification du métier, c'est-à-dire de tous et de chacun. Ajoutons enfin que les difficultés signalées par les professeurs *stagiaires* constituent en règle générale des *révélateurs* précieux de difficultés qui se rencontrent *objectivement* dans l'exercice du métier, que l'on soit débutant ou chevronné. La formation des jeunes professeurs apparaît ainsi corrélative d'une évolution du métier, par la diffusion dans la profession où ils entrent des praxéologies professionnelles co-construites dans la formation [13].

Bibliographie

CHAPIRON, G. et al. (2001). *Mathématiques 5ᵉ*. Paris : Hatier (Collection Triangle).

CHEVALLARD, Y. (2006). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. J. García (eds), *Actes du 1er congrès international sur la théorie anthropologique du didactique (Baeza, 27-30 octobre 2005)*.

CHEVALLARD, Y. & CIRADE, G. (2006). Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques. *Actes du 13e colloque des professeurs et formateurs*

12. Sur la notion de *problème de la profession*, on pourra consulter le journal du séminaire DSMF (didactique des savoirs mathématiques pour formateurs), animé par Yves Chevallard en 2006-2007. Ce journal est disponible en ligne à l'adresse suivante :

13. Pour une présentation détaillée de la formation des professeurs stagiaires dispensée dans la filière *Mathématiques* de l'IUFM d'Aix-Marseille, voir Chevallard & Cirade 2006.

chargés de la formation des enseignants de mathématiques du second degré (Toulouse, 22-23 juin 2006).

CHOQUET, G. (1964). *L'enseignement de la géométrie.* Paris : Hermann.

CIRADE, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel.* Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille I, Marseille.

CORRIEU, L. et al. (1997). *Mathématiques 5e*. Paris : Delagrave.

EUCLIDE (v. 300 av. J.-C.). *Les Éléments.* Volume 1. Livres I à IV. Traduction française de Bernard Vitrac (1990). Paris : PUF.

HILBERT, D. (1899). **Les fondements de la géométrie**. Traduction française de Paul Rossier (1971). Paris : Dunod.

LANOËLLE, A. et al. (1997). *Dimathème 5e*. Paris : Didier.

MALAVAL, J. et al. (1989). *Maths 5e*. Paris : Nathan (Collection Transmath).

MALAVAL, J. et al. (1995). *Maths 5e*. Paris : Nathan (Collection Transmath).

MALAVAL, J. et al. (2001). *Math 5e. Programme 1997.* Paris : Nathan (Collection Transmath).

Ministère de l'Éducation nationale (1998). *Enseigner au collège. Mathématiques. Programmes et accompagnement.* Paris : CNDP.

Ministère de l'Éducation nationale (2007). *Mathématiques – Collège. Projet de document d'accompagnement – Géométrie.*

PÈNE, N. & DEPRESLE, P. (2001). *Math 5e*. Paris : Belin (Collection Nouveau décimale).

PÈNE, N. et al. (1995). *Math 5e*. Paris : Belin.

SERRA, É. (dir.) (2001). *Math 5e. Mathématiques.* Paris : Bordas.

THÉRON, P. et al. (1969). *Mathématiques. Classe de 4e*. Paris : Bordas (Collection Cossart et Théron).

WATTIAUX, L. et al. (1968). *Mathématiques 4e*. Paris : Hachette (Cours Brédif).